ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Session 1988

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES ELEVES PILOTES

Durée : 4 heures
Coef. : 7

Epreuve de MATHEMATIQUES

**Les candidats doivent traiter deux problèmes et seulement deux ; ils indiqueront en tête de leur copie les numéros des problèmes qu'ils ont choisis de traiter et qui seront les seuls à être corrigés.**

PROBLEME N°1 (Algèbre et trigonométrie)

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant de calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{17}$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés.

La question I-3 est indépendante des questions I-1 et I-2.

I-1 a) Soit l'équation : $(E)$ : $z^5 - 1 = 0$ .

Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (E) sous forme module-argument.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ par radicaux carrés. On pourra pour cela procéder comme suit :

α) Déterminer le polynôme Q tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ , on ait :

$z^5 - 1 = (z - 1).Q(z)$ .

β) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par : $z + \frac{1}{z} = Z$.

Vérifier que les quatre zéros complexes de Q, que l'on calculera, s'expriment à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

I-2 De la question précédente, déduire des expressions par radicaux de :

$\cos\frac{2\pi}{5}$ ; $\cos\frac{4\pi}{5}$ ; $\cos\frac{\pi}{5}$ ; $\sin\frac{2\pi}{5}$ ; $\sin\frac{4\pi}{5}$ ; $\sin\frac{\pi}{5}$ .

I-3 On désigne dans cette question par a et h deux réels, et par n un élément de $\mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels strictement positifs). On pose :

$$S(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh) \quad , \qquad \Sigma(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh) \ .$$

a) On suppose que $\sin\frac{h}{2} = 0$. Calculer $S(a,h)$ et $\Sigma(a,h)$ en fonction de a et de n.

b) On suppose que $\sin\frac{h}{2} \neq 0$. Démontrer les formules :

$$S(a,h) = \frac{\sin\frac{nh}{2} \cdot \cos\left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}} \quad , \qquad \Sigma(a,h) = \frac{\sin\frac{nh}{2} \cdot \sin\left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}} \ .$$

On pourra pour cela évaluer $[S(a,h) + i\,\Sigma(a,h)]$, cette méthode n'étant toutefois pas imposée.

I - 4 Dans cette question et dans les suivantes du présent problème, θ désigne, pour alléger les notations, le réel $\frac{\pi}{17}$ . Dans cette question et dans toutes celles qui suivent dans le présent problème, le calcul des valeurs décimales approchées des radicaux n'est pas demandé.

On pose : $x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta$ ,

$x_2 = \cos\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta$ .

a) Montrer que $x_1 > 0$.

b) Calculer $(x_1 + x_2)$ à l'aide de la question I-3. On trouvera un rationnel très simple.

c) Calculer le produit $x_1.x_2$. On devra pour cela :

α) développer le produit des deux sommes $x_1$ et $x_2$ ;

β) appliquer au résultat obtenu la formule donnant la linéarisation du produit cos a.cos b , où a et b sont deux réels quelconques ;

γ) en conclure que $x_1x_2 = -2(x_1+x_2)$ ;

δ) vérifier finalement que $x_1x_2$ est un entier relatif que l'on précisera.

d) Déduire de ce qui précède des expressions de $x_1$ et $x_2$ par radicaux carrés.

I-5 On pose ici : $y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta$ ,

$y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta$ ,

$y_3 = \cos\theta + \cos 13\theta$ ,

$y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta$ .

Calculer, en s'inspirant de la question précédente, les produits $y_1.y_2$ et $y_3.y_4$.

En déduire des expressions de $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

I-6 Déduire enfin de ce qui précède une expression de cos θ à l'aide de radicaux carrés.

T.S.V.P.

ECOLE NATIONALE de l'AVIATION CIVILE-Pilotes

**PROBLEME N° II** (Algèbre et Analyse)

**Rappels et notations**

a) Dans tout le problème, n désigne un entier positif ou nul. Les polynômes étudiés sont à coefficients réels.

b) Les nombres $C_n^k$ désignent les coefficients du binôme de Newton. Les candidats peuvent, s'ils le désirent, écrire $\binom{n}{k}$ au lieu de $C_n^k$.

c) Si u est un réel, on rappelle que E(u) désigne l'unique entier relatif tel que : $E(u) \leq u < E(u) + 1$.

d) Selon l'usage, si P(X) désigne un polynôme formel, élément de $\mathbb{R}[X]$,
$P : x \longmapsto P(x)$
désigne la fonction polynôme associée.

II.1. - En supposant $n \geq 1$, déterminer des expressions simples en fonction de n

de $S_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k}$ et de $I_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_n^{2k+1}$.

II.2. - a) Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $U_n(X)$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs), tel que, pour tout θ réel, on ait l'égalité : $\sin(n+1)\theta = \sin\theta \cdot U_n(\cos\theta)$.

b) Déterminer le degré et le terme de plus haut degré de $U_n(X)$. Etudier, selon les valeurs de n, la parité éventuelle de $U_n$.

II.3. - En transformant en produit l'expression $[\sin(n+2)\theta + \sin(n\theta)]$, trouver une relation de récurrence liant $U_{n-1}$, $U_n$, $U_{n+1}$ et X.

II.4. - Le but de cette question est de calculer les coefficients de $U_n(X)$ à l'aide d'une équation différentielle vérifiée par la fonction polynôme associée $U_n$.

a) On pose, pour θ réel : $f_n(\theta) = \sin(n+1)\theta$,

et, lorsque $\sin\theta \neq 0$, $g_n(\theta) = \frac{f_n(\theta)}{\sin\theta}$.

Vérifier que : $f''_n(\theta) + (n+1)^2 f_n(\theta) = 0$.

En déduire une équation différentielle $(E_n)$ vérifiée par $g_n$ sur tout intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$.

b) Remarquant que $U_n(\cos\theta) = g_n(\theta)$ et posant $x = \cos\theta$, en déduire une équation différentielle $(E'_n)$ liant $U_n$, $U'_n$, $U''_n$ et x.

c) Vérifier qu'on peut poser : $U_n(x) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{n,k} x^{n-2k}$

et, à l'aide de $(E'_n)$, calculer $a_{n,k}$ en fonction de n et de k. On vérifiera que $a_{n,k}$ s'exprime simplement à l'aide de $C_{n-k}^k$ et que c'est un entier relatif.

d) Expliciter $U_0(X)$, $U_1(X)$, $U_2(X)$, $U_3(X)$.

II.5. - On pose, j et k étant deux entiers positifs ou nuls :

$$I_{j,k} = \int_{-1}^{1} U_j(x) U_k(x) \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Calculer $I_{j,k}$ lorsque $j \neq k$. Calculer $I_{j,j}$.

II.6. - Montrer que les zéros de $U_n$, lorsque $n \geq 1$, sont réels, simples, appartiennent à $]-1, +1[$, et que, si $n \geq 2$, $U_n$ et $U_{n-1}$ n'ont aucun zéro commun et que les zéros de $U_n$ sont séparés par ceux de $U_{n-1}$.

On signale aux candidats que cette question peut se traiter, soit par calcul explicite des zéros de $U_n$, soit à l'aide de la question II.5.

II.7. - t et x étant deux réels, on considère la fonction :

$$f_x : t \longmapsto f_x(t) = \frac{1}{1 - 2tx + t^2}.$$

Montrer que $f_x(t)$ admet, selon les puissances de t, un développement limité à tout ordre lorsque $t \to 0$. On note $A_n(x)$ le coefficient de $t^n$ de ce développement : calculer $A_0(x)$, $A_1(x)$, puis $A_n(x)$ à l'aide des résultats obtenus au début du problème.

II.8. - θ désignant un réel, montrer que :

$\mathrm{sh}(n+1)\theta = \mathrm{sh}\theta . V_n(\mathrm{ch}\theta)$, où les symboles sh et ch désignent respectivement le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique et où $V_n$ désigne un polynôme ; comparer $V_n$ et le polynôme $U_n$ défini en II.2.

Tournez la page S.V.P.

**PROBLEME N° III** (Géométrie et analyse)

**Notations**

L'espace affine euclidien de dimension 3 de la géométrie usuelle est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'axes Ox, Oy, Oz. Les coordonnées d'un point M sont notées (x, y, z).

On appelle $\mathcal{D}$ l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient les quatre inégalités :

$$y \geq 0, \qquad z \geq 0, \qquad x^2 + y^2 - x \leq 0, \qquad x^2 + z^2 - 1 \leq 0.$$

III.1.- Dessiner les projections orthogonales de $\mathcal{D}$ sur les plans $z = 0$ et $y = 0$.

III.2.- Cette question est sans lien avec la précédente.
Soit x un réel tel que $x > 1$, n un élément de $\mathbb{N}^*$, ensemble des entiers naturels strictement positifs. On note $F_n$ l'unique fonction dérivable vérifiant :

$$F'_n(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^n} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F_n(x) = 0.$$

a) Donner l'expression de $F_1(x)$ à l'aide d'un logarithme népérien.

b) Exprimer $F_{n+1}(x)$ à l'aide de $F_n(x)$ et d'une fraction rationnelle simple.

c) En déduire que :

$$F_2(x) = k_2 F_1(x) + G_2(x) \quad \text{et} \quad F_3(x) = k_3 F_1(x) + G_3(x),$$

où $k_2$ et $k_3$ sont des rationnels que l'on donnera sous forme de fractions irréductibles, et où $G_2$ et $G_3$ sont des fractions rationnelles que l'on présentera sous forme aussi simple que possible.

III.3.- On se propose de calculer le volume de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire l'intégrale triple :

$$\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dx\, dy\, dz.$$

a) Montrer que le calcul de $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ peut se ramener à celui d'une intégrale double dans le plan affine $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Effectuer sur l'intégrale précédente le changement de variables défini par : $x = r.\cos\theta$, $y = r.\sin\theta$ ; on précisera r et $\theta$ en convenant que $r \geq 0$ et que, pour tout point tel que $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

c) En déduire que :

$$\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\, d\theta,$$

où f est une fonction que l'on précisera.

d) Ramener le calcul de l'intégrale précédente, par un ou des changements de variables convenablement choisis, à celui d'une intégrale portant sur une fraction rationnelle. Le correcteur attachera du prix à la relative simplicité des calculs effectués. Il pourra être utile d'employer les résultats de la question III.2.

En déduire finalement $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ et vérifier que :

$$\mathcal{V}(\mathcal{D}) = a\sqrt{2} + b\, \mathrm{Log}(1 + \sqrt{2}),$$

où Log désigne le logarithme népérien et où a et b sont des rationnels de signes différents que l'on donnera sous forme de fractions irréductibles.

e) Donner la valeur décimale approchée de $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ à $10^{-7}$ près par défaut.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail